

SÉRIE LIMITES - CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

Classes : 3^o maths et sc exp

Exercice 1 :

- 1) Soit la fonction h définie par $h(x) = \frac{x^3 - 7x - 6}{x^2 - x - 6}$.
 - a) Justifier que h est continue sur son ensemble de définition.
 - b) Calculer la limite de $h(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - c) Montrer que h admet un prolongement par continuité en (-2) et 3 que l'on précisera.
- 2) Soit la fonction g définie par :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2+x+1}+x-3} & \text{si } x \neq 1 \\ g(1) = a \text{ avec } a \in \mathbb{R} \end{cases}$$
 - a) Déterminer l'ensemble de définition de g .
 - b) Déterminer le réel a pour que g soit continue en 1 .
- 3) Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = h(x), & \text{si } x < -2 \\ f(x) = x^3 - 2x + 3, & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ f(x) = g(x), & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
 - a) Justifier que f est définie sur \mathbb{R} .
 - b) Étudier la continuité de f en (-2) et en 1 .
 - c) Déterminer les intervalles de \mathbb{R} où f est continue.
 - d) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[-2,0]$ au moins une solution α .
 - e) Donner un encadrement du réel α d'amplitude $0,1$.

Exercice 2 :

Soit la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2+5x+2}{x^2-4}, & \text{si } x < -2 \\ f(x) = \frac{2-2|x-1|}{x^2+x}, & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ f(x) = \sqrt{4x^2+x-5} - x, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Étudier la continuité de f en -2 et en 1 .
- 3) Étudier la limite de f en -1 . Interpréter le résultat graphiquement.
- 4) f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
- 5) Calculer la limite de $f(x)$ en $-\infty$. Interpréter le résultat graphiquement.
- 6) Calculer la limite de $f(x)$ en $+\infty$.
- 7) Montrer que la droite $\Delta : y = x + \frac{1}{4}$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3 :

- I) Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$ et \mathcal{C} sa courbe dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 1) Etudier la limite de f en -1 . Interpréter graphiquement le résultat.
 - 2) Montrer que la droite $D : y = x + 1$ est une asymptote à (\mathcal{C}) au voisinage de $-\infty$. Etudier la position de (\mathcal{C}) par rapport à D .
 - 3) Montrer que f est dérivable en tout réel a de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et que $f'(a) = \frac{a^2 + 2a - 3}{(a + 1)^2}$
 - 4) Soit A et B deux points de (\mathcal{C}) d'abscisses respectives 0 et 3 . Ecrire les équations des tangentes à (\mathcal{C}) parallèles à (AB) .
- II) Soit g la fonction définie par $\begin{cases} g(x) = f(x), \text{ si } x \in]-\infty, 0[\\ g(x) = x + 3 + \sqrt{\frac{x+4}{x+1}}, \text{ si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$. On désigne par (Γ) la courbe représentative de g dans le même repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 1) Déterminer l'ensemble de définition de g .
 - 2) Montrer que g est continue en 0 .
 - 3) Etudier la dérivabilité de g en 0 . Interpréter graphiquement le résultat.
 - 4) Montrer que la droite $\Delta : y = x + 4$ est une asymptote à (Γ) au voisinage de $(+\infty)$

Exercice 4 :

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. On note \mathcal{C} la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan.

- 1) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. En déduire $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(-2 + 2t) - f(-2)}{t}$.
- 2) Déterminer les points de \mathcal{C} où la tangente est parallèle à $D : 3x - y + \alpha = 0$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour quelle valeur de α D est-elle tangente à \mathcal{C} ?
- 3) Déterminer le nombre des tangentes à \mathcal{C} issus du point $I(3, -1)$.
- 4) Soit la fonction g définie par $g(x) = |x^2 - x| \times f(x)$. Montrer que g est dérivable en 1 .
- 5) h est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\begin{cases} h(x) = f(x) & \text{si } x \leq 1 \\ h(x) = \sqrt{x^2 + 3} + ax & \text{si } x > 1 \end{cases}$
 - a) Déterminer a pour que h soit continue en 1 puis calculer la limite en $+\infty$ de $\frac{h(x)}{x}$ et de $(h(x) + 2)$.
 - b) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}$, h n'est pas dérivable en 1 .

Exercice 5 :

- 1) On pose $f(x) = \sqrt{2x + 4}$, $x \in [2, +\infty[$. \mathcal{C}_f étant la courbe de f .
- a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 2 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- b) Soit $x_0 \in]2, +\infty[$. Calculer $f'(x_0)$. En déduire le point de \mathcal{C}_f où la tangente est perpendiculaire à la droite D d'équation $2x + y - 1 = 0$.

$$2) \text{ Soit } g \text{ la fonction définie par : } \begin{cases} g(x) = -x^2 + ax + \frac{1}{2} & \text{si } x \in]-\infty - 1] \\ g(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} & \text{si } x \in]-1, 2[\\ g(x) = 1 - \frac{x}{2} + f(x) & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}$$

- a) Trouver Dg .
- b) Déterminer a pour que g soit continue en -1 .
- c) Étudier la continuité de g .

On prend dans la suite $a = -\frac{1}{2}$

- 3) Montrer que g est dérivable en -1 et écrire une équation de la tangente T au point d'abscisse -1 . Étudier la position relative de \mathcal{C}_g et T .
- 4) a) Soit $x_0 \in]-\infty, -1[$. Déterminer $g'(x_0)$ puis écrire une équation de la tangente t à \mathcal{C}_g au point d'abscisse x_0 .
- b) Soit $b \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des réels b pour qu'il existe une seule tangente à \mathcal{C}_g
- c) passant par le point $A(0, b)$.